Méthodes pour les isométries vectorielles

1 Matrices orthogonales

Rappels théoriques. La terminologie est désastreuse ; soit $\mathcal{B}_{\text{can}} = (e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ euclidien ; soit f une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans lui-même ; soit $\mathcal{B} = f(\mathcal{B}_{\text{can}}) = (f(e_1), \dots, f(e_n))$; soit enfin $M = \text{Mat}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}(f)$ la matrice de f dans $\mathcal{B}_{\text{can}}$, qui est aussi la matrice de passage entre $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}_{\text{can}}$. Alors :

$$f \text{ est isométrique} \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{B} \text{ est orthonormée} \quad \Leftrightarrow \quad M \text{ est orthogonale.}$$

Pour la même idée, on a trois mots distincts suivant le point de vue (application linéaire, base, matrice).

> **Méthode pour montrer qu'une matrice réelle est orthogonale.**
> On montre que ses colonnes forment une famille orthonormée de $\mathbb{R}^n$.

Justification théorique. Notons C_i la i^{e} colonne de M. Le coefficient en position (i, j) du produit ${}^tMM$ est (C_i, C_j) (au sens du produit scalaire euclidien usuel sur l'espace des colonnes $\mathbb{R}^n$). Donc M est orthogonale si et seulement si $(C_i, C_j) = \delta_{i,j}$ si et seulement si (C_i) est une famille orthonormée.
Dans la pratique, en dimension 3 on calcule (C_1, C_1), (C_1, C_2), (C_1, C_3), puis (C_2, C_2), (C_2, C_3), et enfin (C_3, C_3). La méthode revient à calculer seulement $\frac{n(n+1)}{2}$ des n^2 coefficients de ${}^tMM$, ce qui suffit puisqu'elle est symétrique.

2 Isométrie vectorielle directe ou indirecte

Rappels théoriques. $\mathbb{R}^3$ euclidien est orientable de deux façons différentes, ce qui crée deux classes de bases : directes, ou indirectes. Par convention, on oriente l'espace de façon que la base canonique de $\mathbb{R}^3$ soit directe. Une matrice de passage préserve l'orientation si et seulement si son déterminant est > 0, mais calculer un déterminant est trop long en pratique.

> **Méthode pour déterminer si une isométrie vectorielle de matrice donnée est directe.**
> Soit f une isométrie vectorielle de matrice $M = \text{Mat}_{\mathcal{B}_{\text{can}}} f$. Pour déterminer si f est directe ou indirecte, on compare les signes d'un mineur de M et du coefficient naturellement associé.
> — Supposons $m_{3,3} \neq 0$. Soit δ le mineur (= déterminant du bloc carré 2×2) associé.
>
> $$\left(\begin{array}{cc|c} m_{1,1} & m_{1,2} & m_{1,3} \\ m_{2,1} & m_{2,2} & m_{2,3} \\ \hline m_{3,1} & m_{3,2} & m_{3,3} \end{array}\right)$$
>
> *Inutile de calculer $\delta = m_{1,1}m_{2,2} - m_{2,1}m_{1,2}$ avec précision, on estime simplement son signe.*
> — Si δ et $m_{3,3}$ sont de même signe (non nul), alors f est directe ;
> — si δ et $m_{3,3}$ sont de signe opposé, alors f est indirecte.
> — Si $m_{3,3} = 0$, mais que $m_{1,3} \neq 0$, on essaie avec :
>
> $$\left(\begin{array}{cc|c} m_{1,1} & m_{1,2} & m_{1,3} \\ \hline m_{2,1} & m_{2,2} & m_{2,3} \\ m_{3,1} & m_{3,2} & m_{3,3} \end{array}\right)$$
>
> Même test.

Questions, remarques : adrien.deloro@imj-prg.fr

— Si $m_{1,3} = m_{3,3} = 0$, alors le troisième vecteur de base est $\pm e_2$: on devrait s'en sortir à vue. Je ne donne pas de règle pour ce troisième cas rarissime, il faut réfléchir à chaque fois à cause du risque de se tromper de signe lors de l'extraction du mineur.

Justification théorique. Notons $v_i = f(e_i)$; comme f est une isométrie vectorielle, (v_1, v_2, v_3) est une base orthonormée. Par usage du produit vectoriel on a alors $v_3 = \pm v_1 \wedge v_2$. Or la troisième coordonnée de v_3 est $m_{3,3}$; la troisième coordonnée de $v_1 \wedge v_2$ est δ. Donc s'ils sont de même signe non-nul, v_3 et $v_1 \wedge v_2$ sont colinéaires par $\lambda > 0$: la base est directe. Si les signes sont opposés, on est dans le cas inverse.
Il reste le cas où $m_{3,3}$ est nul ; dans ce cas δ aussi. Si $m_{1,3}$ est nul également, le mineur (2–3, 2–3) doit l'être : la matrice est à peu près creuse, on termine à vue.

3 Détermination de la nature d'une isométrie vectorielle

Nous ne traitons que la dimension 3 : la dimension 2 est bien connue.

Rappels théoriques. Le groupe des isométries linéaires de $\mathbb{R}^3$ usuel peut se décomposer ensemblistement comme $O_3(\mathbb{R}) = \mathrm{SO}_3(\mathbb{R}) \sqcup (O_3(\mathbb{R}) \setminus \mathrm{SO}_3(\mathbb{R}))$, où $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ est le sous-groupe (distingué) des isométries directes. Bien sûr l'ensemble $O_3(\mathbb{R}) \setminus \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ des isométries indirectes ne forme pas un sous-groupe. Précisons un peu les éléments.

— $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ est exactement le groupe des rotations ; Id en fait partie. Il y a quelque chose de miraculeux au fait qu'en dimension 3, la composée de deux rotations vectorielles *même d'axe distinct* est encore une rotation vectorielle.

— $O_3(\mathbb{R}) \setminus \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ est l'ensemble des anti-rotations ; cas particulier : les réflexions (symétries perpendiculaires à un plan). D'autre part $-\mathrm{Id} \in O_3(\mathbb{R}) \setminus \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$, mais ce n'est pas une réflexion.

Méthode pour déterminer la nature d'une isométrie vectorielle en fonction de sa matrice dans une base orthonormée directe.

Soit $M \in O_3(\mathbb{R})$. *Il est essentiel de s'être assuré (§1) que M est bien orthogonale.* Soit f l'isométrie vectorielle associée.

— On commence par déterminer si f est directe ou indirecte (§2).

— Si f est directe, c'est une rotation (Id possible).

— Si f est indirecte, c'est une anti-rotation (éventuellement une réflexion) ;

  — si $\mathrm{Tr}(f) = 1$ alors f est une réflexion ;

  — si $\mathrm{Tr}(f) \neq 1$ alors f est une anti-rotation d'angle non-trivial ($-\mathrm{Id}$ possible).

Rappelons que contrairement au déterminant, la trace est toujours facile à calculer avec précision. Enfin, $\pm\mathrm{Id}$ sont possibles ci-dessus, mais on les reconnaît au premier coup d'œil : comme ce sont les éléments centraux de $O(\mathbb{R}^3)$, elles gardent la même matrice dans toute base.

Justification théorique. Une isométrie vectorielle indirecte f est une anti-rotation (d'angle éventuellement trivial pour une réflexion) ; il existe une base orthonormée où sa matrice devient :

$$\begin{pmatrix} -1 & \\ & R_\theta \end{pmatrix}$$

où R_θ est une matrice de rotation planaire. Donc $\mathrm{Tr}(M) = 2\cos\theta - 1 \leq 1$, avec égalité seulement dans le cas $\theta = 0\ [2\pi]$, i.e. quand $R_\theta = I_2$, i.e. quand f est une réflexion.

4 Description géométrique d'une isométrie vectorielle

Méthode pour déterminer les invariants géométriques d'une isométrie vectorielle.

Soit f une isométrie vectorielle de matrice $M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}} f$ dans la base canonique.

— On peut supposer $f \neq \pm \mathrm{Id}$. (On les met à part parce que l'« axe » de la rotation Id n'est pas bien défini ; de même pour l'« anti-axe » de l'anti-rotation $-\mathrm{Id}$.)
— Si f est une rotation $\neq \mathrm{Id}$, son axe est l'ensemble des vecteurs fixes $\mathrm{Fix}(f) = \ker(f - \mathrm{Id})$, d'équation $\ker(M - I_3)$. *On doit trouver un espace de dimension* 1.
— Si f est une réflexion, son plan est l'ensemble des vecteurs fixes $\mathrm{Fix}(f) = \ker(f - \mathrm{Id})$, d'équation $\ker(M - I_3)$. *On doit trouver un espace de dimension* 2.
— Si f est une anti-rotation $\neq -\mathrm{Id}$, son anti-axe est l'ensemble des vecteurs « renversés » $\ker(f + \mathrm{Id})$, d'équation $\ker(M + I_3)$. *On doit trouver un espace de dimension* 1.

Reste la question de l'angle θ. On rappelle que $\theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ *n'est bien déterminé qu'après avoir orienté l'axe/anti-axe L par un vecteur non-nul v*. Le rédacteur n'aime pas parler de signe pour les éléments de $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ (ceci demanderait de choisir de toujours relever dans $]-\pi, \pi]$, mais à son goût toujours relever dans $[0, 2\pi[$ ne serait pas un choix non-naturel), et parlera donc de celui de leurs fonctions trigonométriques.

Méthode pour arrondir les angles.

Soit f une rotation ou anti-rotation qui n'est ni $\pm \mathrm{Id}$ ni une réflexion. Soit L son axe/anti-axe, orienté par le choix de $v \in L \setminus \{0\}$; soit $\theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ la mesure d'angle associée au choix de v.

— Si f est une rotation :
  — d'une part $\mathrm{Tr}(f) = \mathrm{Tr}(M) = 1 + 2\cos(\theta)$
  — Prendre un vecteur « simple » $x \notin L$ (au moins un vecteur de $\mathcal{B}_{\mathrm{can}}$ conviendra). Calculer $v \wedge x$, l'image $f(x)$, puis $(v \wedge x) \cdot f(x)$; en tout cas estimer son signe.
  Alors $(v \wedge x) \cdot f(x)$ et $\sin(\theta)$ ont même signe.
  — Ceci détermine un unique $\theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$.
— Si f est une anti-rotation :
  — d'une part $\mathrm{Tr}(f) = \mathrm{Tr}(M) = -1 + 2\cos(\theta)$
  — Prendre un vecteur « simple » $x \notin L$. *Ici encore,* $(v \wedge x) \cdot f(x)$ et $\sin(\theta)$ ont même signe.
  — Ceci détermine un unique $\theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$.

Répétons que θ est en général relatif au choix de v : prendre l'opposé de v provoque l'opposition de $v \wedge x$ puis de $(v \wedge x) \cdot f(x)$, donc de $\sin(\theta)$.
Cas particulier : si f est une rotation avec $\mathrm{Tr}(f) = -1$, alors $\theta = \pi\ [2\pi]$ (qui ne dépend alors *pas* de l'orientation de L) ; f est « le demi-tour de l'espace d'axe L ».

Justification théorique.

— Je vais commencer par un rappel dans le plan engendré par (e_1, e_2). Soit r la rotation vectorielle du plan d'angle $\psi \neq 0, \pi\ [2\pi]$. Alors $\sin(\psi) \geq 0$ ssi $e_1 \wedge r(e_1)$ est positivement colinéaire à e_3 ssi la base $(e_1, r(e_1), e_3)$ est directe ssi pour tout vecteur x du plan, $(x, r(x), e_3)$ est directe. En résumé, $\sin(\psi)$ et $\det(x, r(x), e_3)$ ont même signe.
— Cas d'une rotation vectorielle. Soit $\mathcal{B}_x = (v, x, f(x))$; comme $x \notin L$ et que l'angle a été supposé $\neq 0, \pi\ [2\pi]$, $\mathcal{B}_x$ forme une base de $\mathbb{R}^3$. Il existe λ tel que $x + \lambda v \in L^\perp$ (le plan de rotation) ; par construction, $f(x) + \lambda v = f(x + \lambda v) \in L^\perp$ aussi. Donc d'après le cas plan, $\sin(\theta)$ et $\det(v, x + \lambda v, f(x) + \lambda v) = \det(v, x, f(x))$ ont même signe. Ce λ n'était qu'un artifice technique pour pouvoir utiliser le cas plan : oublions-le.
Il reste à estimer $\det(v, x, f(x))$. Ce nombre est exactement $(v \wedge x) \cdot f(x)$ (on peut s'en convaincre en développant selon la troisième colonne). Donc $\sin(\theta) \geq 0$ ssi $\mathcal{B}_x$ est directe ssi $(v \wedge x) \cdot f(x) \geq 0$.
— Cas d'une anti-rotation vectorielle α. La valeur de $\cos(\theta)$ ne surprend personne ; que le signe de $\sin(\theta)$ s'obtienne *de la même façon* que pour une rotation peut étonner. Je donne deux justifications.
  — L'anti-rotation α est la composée d'une rotation ρ avec la réflexion s dans le plan de rotation, $\alpha = s \circ \rho$ (on peut aussi écrire $\rho \circ s$ car s et ρ commutent, comme on s'en assure sur L et sur $L^\perp$).
  Ici α et ρ ont même angle θ, même plan de rotation, qui est aussi le plan de réflexion de s. On oriente l'axe/anti-axe une fois pour toutes.
  Au vu des matrices, clairement $\mathrm{Tr}(\alpha) = -1 + 2\cos(\theta)$. Pour l'estimation du signe de $\sin(\theta)$, on est ramené à l'étude de la rotation ρ : même méthode donc.

— On peut aussi multiplier α par $-\operatorname{Id}$, obtenant la rotation $-\alpha$ (qui n'est *pas* $\rho^{\pm 1}$ avec la rotation ρ de la justification précédente comme on le verra dans un instant). Grâce au cas des rotations, on sait déterminer la droite D et l'angle φ associés à $-\alpha$, modulo le choix du vecteur v. L'anti-axe de α est encore D ; on y garde le même vecteur v. Dans le plan de rotation on a multiplié par $-\operatorname{Id}$ (rotation du plan d'angle π), donc $\varphi = \theta + \pi$. Ainsi :

$$\operatorname{Tr}(f) = -\operatorname{Tr}(g) = -(1 + 2\cos(\varphi)) = -1 - 2\cos(\theta + \pi) = -1 + 2\cos(\theta)$$

En outre, un vecteur $x \notin L$ étant fixé, on sait (cas d'une rotation) que $\sin(\theta) \geq 0$ ssi $\sin(\varphi) \leq 0$ ssi $(v, x, g(x))$ est *indirecte* ssi $(v, x, -f(x))$ est *indirecte* ssi $(v, x, f(x))$ est *directe*.

On retiendra donc que le signe de $\sin(\theta)$ se calcule toujours de la même manière, et que la seule différence entre rotation et anti-rotation est dans le calcul du cosinus.